

# 令和5年度サイエンス・ファイト作品紹介

学 校 長 崎 県 立 大 村 高 等 学 校

学 年 3 年

氏 名 戸 田 梨 花、朝 長 美 羽  
木 原 愛 華

タイトル 油分け算について

## 概 要

「19Lの水と7Lの水が入る容器が2つあります。これを用いて1Lを作ってください。」という油分け算問題の、数学を用いた他解法を検討しました。

# 油分け算について

## 〈研究動機〉

油分け算の問題をより簡単な解法を探してみようと思った。

## 〈先行研究〉

### 〔問題〕

19Lの水と7Lの水が入る2つの容器があります。この2つの容器を使って1Lを作ってください。

### 〔解〕

1次不定方程式  $19x + 7y = 1$  について、ユークリッドの互除法を用いると、 $(x, y) = (3, -8)$  が特殊解であることが分かる。

つまり、19Lの容器で3回水をついで、7Lの容器で8回水を捨てればよい。

※ $19x + 7y = 1$  の特殊解を求めることにより、答えを導く過程を求めることはできないが、水をつぐ回数と捨てる回数だけは求めることができる。

## 〈目的〉

ユークリッドの互除法を用いた1次不定方程式の特殊解の求め方をより簡単にできないか？

## 〈検証1〉

$a$  と  $b$  は互いに素な自然数で  $a > b$  とする。

また  $k$  を定数とし

$$a = bq_1 + r_1$$

$$b = r_1q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3$$

⋮

⋮

⋮

とする。

1次不定方程式  $ax + by = k$  について

【パターン1】  $k = r_1$  のとき

$$ax + by = r_1 \text{ の特殊解は } (x_1, y_1) = (1, -q_1)$$

【パターン2】  $k = r_2$  のとき

$ax + by = r_2$  の特殊解は

$$(x_2, y_2) = (-q_1, 1 + q_1q_2)$$

【パターン3】  $k = r_3$  のとき

$ax + by = r_3$  の特殊解は

$$(x_3, y_3) = (1 + q_2q_3, -q_1 - q_2 - q_1q_2q_3)$$

## 〈考察1〉

【パターン1】～【パターン3】より求めた特殊解に、規則性を見つけることはできなかった。

## 〈仮説〉

漸化式を用いて規則性を見つけることができる。

## 〈検証2〉

方程式  $ax + by = r_n$  の特殊解を  $(x_n, y_n)$  とすると

$$ax_n + by_n = r_n \quad \cdots \text{①}$$

$$ax_{n+1} + by_{n+1} = r_{n+1} \quad \cdots \text{②}$$

$$r_n = r_{n+1}q_{n+2} + r_{n+2} \quad \cdots \text{③}$$

①, ②を③へ代入し  $r_n$  と  $r_{n+1}$  を消去すると

$$ax_n + by_n = (ax_{n+1} + by_{n+1})q_{n+2} + r_{n+2}$$

$$a(x_n - x_{n+1}q_{n+2}) + b(y_n - y_{n+1}q_{n+2}) = r_{n+2}$$

よって、

$$x_{n+2} = x_n - x_{n+1}q_{n+2}$$

$$y_{n+2} = y_n - y_{n+1}q_{n+2}$$

## 〈検証2のまとめ〉

漸化式を用いて規則性を見つけることができた。

$$(x_1, y_1) = (1, -q_1)$$

$$(x_2, y_2) = (-q_1, 1 + q_1q_2)$$

$n \geq 1$  のとき

$$(x_{n+2}, y_{n+2}) =$$

$$(x_n - x_{n+1}q_{n+2}, y_n - y_{n+1}q_{n+2})$$

## 〈試行〉

2つの自然数19と7に互除法を適用すると

$$\begin{array}{r} 3 \quad -1 \quad 1 \\ -2 \quad -1 \quad -2 \\ 2 \overline{) 5} \quad \overline{) 7} \quad \overline{) 19} \\ \underline{4} \quad \underline{5} \quad \underline{14} \\ 1 \quad 2 \quad 5 \end{array}$$

$19x + 7y = 5$  の  $x$  の特殊解は  $x = 1$  ( $y = -2$ )

$19x + 7y = 2$  の  $x$  の特殊解は  $x = -1$  ( $y = 3$ )

$19x + 7y = 1$  の  $x$  の特殊解は  $x = 3$  ( $y = -8$ )

## 〈今後の展望〉

- ・漸化式を用いない特殊解の関係性を考える。
- ・ $y$  の特殊解について簡単に求める方法を考える。

## 〈参考文献〉

自由自在-受験研究社

コトバンク-日本大百科全書(ニッポニカ)

## 油分け算について

長崎県立大村高等学校 3年

研究者氏名 木原 愛華・戸田 梨花

朝長 美羽

指導者氏名 北川 昭彦

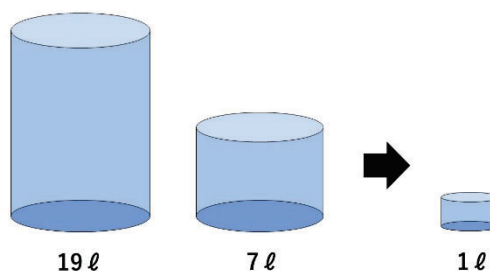
### 要旨

私たちは先行研究であった 19 L と 7 L の容器から 1 L を作るという、油分け算の問題のより簡単な解法を調査した。油分け算の問題をユークリッドの互除法を用いると、水をつぐ回数と捨てる回数のみ求めることができた。このことから私たちは規則性を探ることにしたが、規則性を見つけることはできなかった。次に漸化式を用いて、規則性を探してみたところ、規則性を見つけることができた。また私たちは筆算を工夫して用いることで、 $19x + 7y = 1$  の特殊解をより簡単に見つけることができた。今後は漸化式を用いない特殊解の関係性や  $y$  の特殊解を求める方法を調べていきたい。

### 1. 背景と目的

#### <問題>

19 L の水と 7 L の水が入る 2 つの容器があります。この 2 つの容器を使って 1 L を作ってください。



#### <解>

一次不定方程式  $19x + 7y = 1$  について、ユークリッドの互除法を用いると、

$$(x, y) = (3, -8)$$

が特殊解であることがわかる。つまり、19 L の油をついで、7 L の容器で 8 回油を捨てればよい。

※  $19x + 7y = 1$  の特殊解を求めることにより、答えを導く過程を求めることはできないが、油をつぐ回数と捨てる回数だけは求めることができる。

そこで私たちは油分け算の問題をより簡単な解法を探してみようと思った。

### 2. 研究の方法、仮説

容器の容量を  $a \cdot b$  とおき、最終的に作る容量を  $k$  とした。(  $k$  は定数)

ユークリッドの互除法を用いた、特殊解をより簡単に導く方法を見つけるために、以下の検証を行った。

〈 検証 1 〉

一次不定方程式  $ax + by = k$  の特殊解を  $(x, y)$  とし、 $a$  と  $b$  は互いに素な自然数であり、 $a > b$  とすると、 $a = bq_1 + r_1$  ,  $b = r_1q_2 + r_2$  ,  $r_1 = r_2q_3 + r_3$  ... となった。

[パターン 1]  $k = r_1$  のとき  $ax + by = r_1$  の特殊解は  $(x_1, y_1) = (1, -q_1)$

[パターン 2]  $k = r_2$  のとき  $ax + by = r_2$  の特殊解は  $(x_2, y_2) = (-q_1, 1 + q_1q_2)$

[パターン 3]  $k = r_3$  のとき  $ax + by = r_3$  の特殊解は  $(x_3, y_3) = (1 + q_2q_3, -q_1 - q_2 - q_1q_2q_3)$

〈 考察 〉

[パターン 1] ~ [パターン 3] より求めた特殊解に規則性を見つけられなかった。

検証 1 の結果を受け、ユークリッドの互除法に漸化式を加え、規則性を探ることにした。

〈 検証 2 〉

方程式  $ax_n + by_n = r_n$  の特殊解を  $(x_n, y_n)$  とし、検証 1 と同様に計算すると、規則性を見つけることができ、 $x_{n+2} = x_n - x_{n+1}q_{n+2}$  ,  $y_{n+2} = y_n - y_{n+1}q_{n+2}$  つまり、

$$(x_1, y_1) = (1, -q_1)$$

$$(x_2, y_2) = (-q_1, 1 + q_1q_2)$$

$n \geq 1$  のとき

$$(x_{n+2}, y_{n+2}) = (x_n - x_{n+1}q_{n+2}, y_n - y_{n+1}q_{n+2})$$
 と表すことができた。

3. 試行

2つの自然数 19 と 7 を互除法に適応すると

$$19x + 7y = 5 \text{ の特殊解は } x = 1 \text{ ( } y = -2 \text{)}$$

$$19x + 7y = 2 \text{ の特殊解は } x = -1 \text{ ( } y = 3 \text{)}$$

$$19x + 7y = 1 \text{ の特殊解は } x = 3 \text{ ( } y = -8 \text{)}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccc}
 3 & -1 & 1 \\
 -2 & -1 & 2 \\
 \hline
 5 & 7 & 19 \\
 \hline
 4 & 5 & 14 \\
 \hline
 1 & 2 & 5
 \end{array}
 \end{array}$$

$q_2$  (19 ÷ 7 の商),  $q_1$  (7 ÷ 2 の商),  $r_1$  (5),  $r_2$  (2),  $r_3$  (1)

4. 結論

〈検証 1〉の 3 パターンで求めた特殊解に規則性を見つけることができなかった。

〈検証 2〉で漸化式を用いると規則性を見つけることができた。

5. 謝辞

この研究、論文の作成にあたり、適切な助言やご指導をしてくださった先生方に感謝を申し上げます。ありがとうございました。

6. 参考文献

自由自在-受験研究社 コトバンク-日本大百科全書(ニッポニカ)