令和５年度サイエンス・ファイト作品紹介

学　校　　長 崎 県 立 大 村 高 等 学 校

学　年　　３ 年

氏　名　　中島　誠拓、中村　友哉
西川　真叶

タイトル　「ポリアの壺」モデルにおける様々な確率、およびその分布について

概　要

赤１白１の２個の玉から１個を取る。取った玉と、取った同色玉も追加で戻し、また１個取る・・。確率を求める 「ポリアの壺」モデルの証明を様々な視点で試みました。

「ポリアの壺」モデルにおける様々な確率、およびその分布について

長崎県立大村高等学校　数理探究科３年　中島 誠拓　中村 友哉　西川 真叶

1.先行研究

・赤玉a個 白玉b個入った壺の中から玉を1個取り出す

・取り出した玉、及び同じ色の計2個を壺の中に入れる

n回目の試行において壺から赤玉を取り出す確率

$$\mathrm{P}(n)=\frac{a}{a+b}$$

← nに依存しない

2.例

初期条件

a=1.b=1

P(1)=P(2)

3.目的

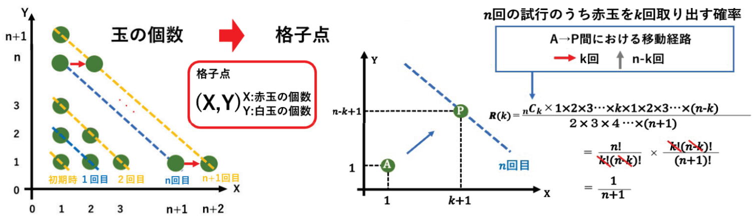
（１）n回目の試行後に壺の中に入っている赤玉の個数の確率分布とP(n)を求める別解を考える

（２）最初のm回の試行ですべて赤玉を取り出すことが最後の試行(n 回目)に影響を及ぼすのかを考える

4.試行1　赤玉の個数の確率分布を考える

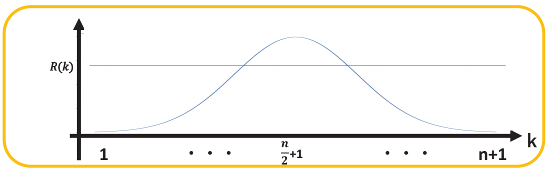
・R(k)を求める

R(k):n回目の試行後に壺の中に赤玉がk個入っている確率



$$R(k)=\frac{{}_nC_k\times 1\times2\times3\cdots\times k\times1\times2\times3\cdots\times(n-k)}{2\times3\times4\cdots\times(n+1)}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\times\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!}=\frac{1}{n+1}$$

・確率分布を作成する

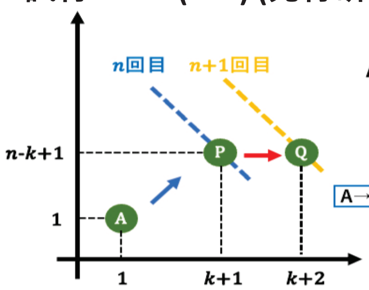


赤線:結果

青線:予想

一様分布になる

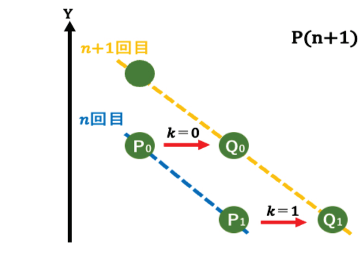
5.試行2　P(n+1) (先行研究における確率)を求める



A→Q間における確率

$$R(k)\times\frac{k+1}{n+2}$$

A→P間における確率　P→Q間における確率



$$\mathrm{P}(n+1)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{R}(k)\times\frac{k+1}{n+2}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\times\frac{k+1}{n+2}$$

$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\times\sum_{k=0}^{n}(k+1)$$

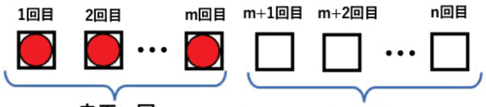
$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\times\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

6.試行3　条件付き確率を用いて赤玉を取り出す確率の起こりやすさを考える

事象M:m回目(0≦m≦n)までに取り出した玉が全て赤玉

$\mathrm{P_M}(\mathrm{k})$: 事象Mが起きたときにn回の試行において赤玉をk個取り出す条件付き確率

・$\mathrm{P_M}(\mathrm{k})$を求める



赤玉と白玉を取り出す順序

赤玉の取り出し方　白玉の取り出し方

$$P_M(k)=\frac{{}_{n-m}C_{k-m}\times(1+m)\cdot(2+m)\cdot\cdots\cdot k\times1\cdot2\cdot\cdots\cdot(n-k)}{(2+m)\cdot(3+m)\cdot\cdots\cdot(n+1)}$$

すべての玉の取り出し方

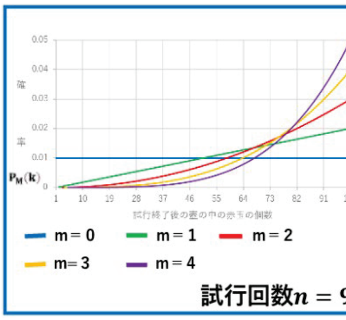
$$=\frac{\frac{k!}{m!}\times\cancel{(n-k)!}\times\frac{(n-m)!}{(k-m)!\,\cancel{(n-k)!}}}{\frac{(n+1)!}{(m+1)!}}$$

$$=\frac{k!}{m!\,(k-m)!}\times\frac{(n-m)!\,(m+1)!}{(n+1)!}$$

$$=\boxed{\frac{{}_kC_m}{{}_{n+1}C_{m+1}}}$$

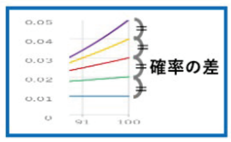
２つのコンビネーションで表すことができた

・確率分布を考える



考察

k=nにおける確率の差が一定になる



・考察の一般化

$$P_M(k)=\frac{k!}{(k-m)!}\times\frac{(n-m)!}{n!}\times\frac{m+1}{n+1}$$

$k=n$のとき

$$P_M(k)=\frac{m+1}{n+1}$$

確率の差は

$$P_M(k)-P_{M-1}(k)=\frac{m+1}{n+1}-\frac{m}{n+1}=\boxed{\frac{1}{n+1}}=\boxed{一定}$$

7.今後の展望

赤玉と白玉の個数を一般化したときのP(n)の確率分布や$\mathrm{P_M}(\mathrm{k})$の確率分布を調べる。

8.参考文献

マスオ．高校数学の美しい物語．SBクリエイティブ．2016.

「ポリアの壺」モデルにおける様々な確率、およびその分布について

長崎県立大村高等学校３年
研究者　西川　真叶・中島　誠拓・中村　友哉
指導者　北川　昭彦

１．要旨

シミュレーションのモデルの１つに「ポリアの壺」という確率モデルがある。格子点を用いて確率を求める方法や n 回目の試行後における赤玉の個数の確率分布、赤玉が連続して出る場合に n 回の試行後の結果にどのような影響を及ぼすのか条件つき確率を用いて考えた。玉の個数を格子点と考えることで求める確率を視覚化することができた。確率分布は正規分布になるという仮説に反して一様分布になった。赤玉が連続して出る回数が増えたとしても、n 回目に赤玉を取り出す確率は飛躍的に増えていくとは言えなかった。

２．先行研究【ポリアの壺】

壺の中に赤玉が a 個、白玉が b 個入っている。壺から玉を１つ取り出して色を確認し、玉を壺に戻す。さらに選んだ玉と同じ色の玉を１つ壺に加える試行を繰り返す。n 回目に赤玉を取り出す確率は a / a+b となる。本研究では a = b = 1 のときを考えた。

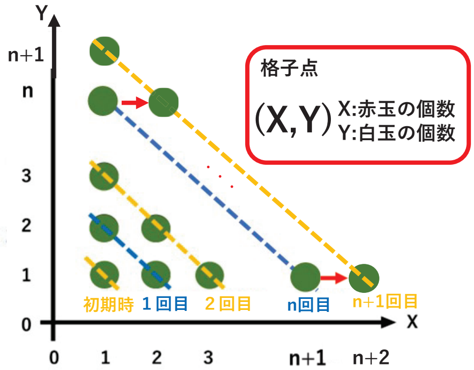
３．目的及び仮説

（１）　n 回の試行後、壺の中に入っている赤玉の個数は１個から n+1 個までの n+1 パターンがありそれぞれの確率を求める。仮説としては、n 回の試行後の赤玉の個数に関する確率分布が正規分布になるのではないかと考えた。

（２）　最初に何回か赤玉が連続して出る場合を考え、そのことが、n 回の試行後の結果にどのような影響を及ぼすのかを調べる。仮説としては、最初に連続して出る赤玉の個数が多いほど、n 回すべて赤玉が出る確率が飛躍的に大きくなるのではないかと考えた。

４．試行１【先行研究の証明】

座標平面において、x 座標に赤玉の個数、y 座標に白玉の個数を対応させる。このとき、直線上に同一試行回数の事象が分布している(右図参照)。点(1,1) から点(k+1 , n−k+1) へ移動する確率を以下のようにして求めた。



玉の取り出し方の総数は $2\times3\times4\times\cdots\times(n+1)=(n+1)!$ 通り。

また，n 回中 k 回だけ赤玉が出る場合の数は（全ての玉を異なるものとして）

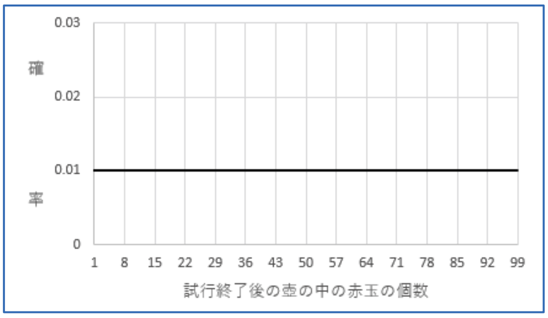
${}_nC_k\times1\times2\times3\times\cdots\times k\times1\times2\times3\times\cdots\times(n-k)$

$=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\cdot k!\cdot(n-k)!=n!$ 通りだから，求める確率は

$$\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{n!}{(n+1)!}\times\frac{k+1}{n+2}\right\}=\frac{1}{(n+1)}\times\frac{1}{n+2}\times\frac{n+1}{2}(n+2)=\frac{1}{2}$$

５．考察１

n 回の試行において赤玉を k 個取り出す確率は 1 / n+1 であることが試行１より分かった。仮説に反して確率分布は一様分布となった。（右図は n= 99 のとき）



６．試行２【目的（２）の確率を求める。】

「m 回目（0≦m≦n）までに取り出した玉が全て赤玉である事象 M が起きたときに、n 回の試行において赤玉を k 個取り出す条件つき確率」を以下のようにして求めた。

$$P_M(k)=\frac{\dfrac{1\times2\times3\times\cdots\times m\times{}_{n-m}C_{k-m}\times(m+1)\times(m+2)\times\cdots\times k\times1\times2\times3\times\cdots\times(n-k)}{2\times3\times4\times\cdots(n+1)}}{\dfrac{1\times2\times3\times\cdots\times m\times(m+2)\times(m+3)\times(m+4)\times\cdots(n+1)}{2\times3\times4\times\cdots(n+1)}}$$

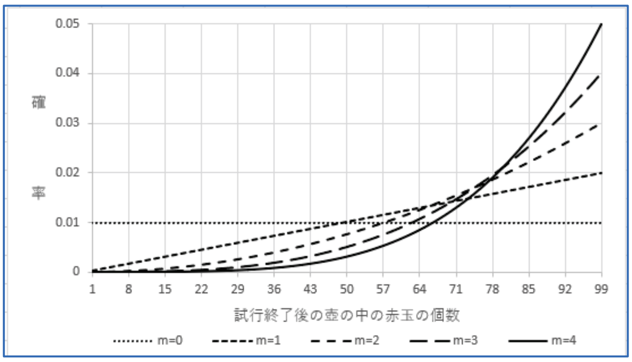
$$=\frac{\dfrac{k!\times\dfrac{(n-m)!}{(k-m)!(n-k)!}\times(n-k!)}{(n+1)!}}{\dfrac{1}{m+1}}$$

$$=\frac{k!\times(n-m)!}{(k-m)!\times(n+1)!}\times(m+1)$$

$$=\frac{k!}{m!\times(k-m)!}\times\frac{(m+1)!\times(n-m)!}{(n+1)!}=\frac{{}_kC_m}{{}_{n+1}C_{m+1}}$$

７．考察２

右図は n= 99 とした確率分布である。 m= 1 のときは定数、m=2、3、4 のときはそれぞれ１次、２次、３次関数となった。確率の差をとると、k=99 において 0.01（定数）であった。ここでも仮説に反して、確率が飛躍的に増えていくとは言えなかった。



８．今後の展望

a = b = 1 以外でも同様のことが言えるのか、それとも新しい知見が得られるのかを研究したい。また、試行２において分かった「確率の差が一定になること」を世の中の事象に結び付け、より深く調べていきたい。

９．参考文献

マスオ．高校数学の美しい物語．SB クリエイティブ．2016.

10．指導者からのコメント

紙面の都合上掲載できませんでしたが、「a と b の値を 1 に限らない場合の確率が a / a+b 」の証明にも粘り強く取り組み、証明をしてくれました。今後、モデル化できていない現象を解析することで、世の中を発展させてくれることを期待しています。